Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et Applications.

RM

2022-2023

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps commutatif.

1 Formes linéaires et espace dual

1.1 Formes linéaires

Définition 1 : On appelle forme linéaire sur E une application linéaire $\omega : E \to \mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ est noté E^* et est dit espace dual de E.

Remarque 2 : Si $x \in E$ et $\varphi \in E^*$, on note parfois $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$.

Exemple 3 : 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'application $f_A : M \mapsto Tr(AM)$ est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$.

2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f : E \to$ est différentiable en un point a, alors df_a est une forme linéaire.

Le morphisme d'évaluation $ev_a : P \mapsto P(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 4 : Soit $\omega \in E^*$ une forme linéaire non nul. On a alors que $dim(Im(\omega)) = 1$ et $dim(\ker(\omega)) = n - 1$, et donc ω est surjective. Le noyau de ω est dit hyperplan de E déterminé par ω.

Remarque 5 : Réciproquement, tout hyperplan de E (un s.e.v de dimension $n - 1$) est le noyau d'une forme linéaire.

Application 6 : Soit $\omega \in E^*$. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans E, alors $\omega(x) = x_1\omega(e_1) + ... + x_n\omega(e_n) = x_1 a_1 + ... + x_n a_n$ et donc l'hyperplan déterminé par ω sont les vecteurs de E qui vérifient $a_1 x_1 + ... + x_n a_n = 0$. L'espace des solutions d'un système d'équations linéaires peut donc être vu comme une intersection d'hyperplans.

1.2 Espace dual et base dual

Proposition 7 : L'ensemble E^* est un espace vectoriel et $dimE = dimE^*$. En particulier, E et E^* sont isomorphes.

Remarque 8 : Cette isomorphisme n'est pas canonique, c'est-à-dire qu'il dépends du choix de la base.

Théorème 9 : Soit $\{e_1, ..., e_n\}$ une base de E. Considérons les formes linéaires $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ définies par $\theta_i(e_k) = \delta_{i,k}$. Alors $\{\theta_1, ..., \theta_n\}$ est une base de E^*, dite base dual de $\{e_1, ..., e_n\}$, noté aussi $e_1^*, ..., e_n^*$.

Exemple 10 : Soit $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 0, -1), e_3 = (0, 1, 1)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Alors la base dual de $(\mathbb{R}^3)^*$ est $\theta_1(x) = x_1 - x_2 + x_3, \theta_2(x) = x_2 - x_3, \theta_3(x) = -x_1 + 2x_2 - x_3$.

Remarque 11 : On a donc que tout forme linéaire ω sur E s'écrit de manière unique $\omega = \sum_{j=1}^n \omega(e_j)e_j^*$.

Exemple 12 : En notant $B = (X^j)_{0 \leq j \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, tout polynôme $P_i n \mathbb{K}_n[X]$ s'écrit $P = \sum_{j=0}^n a_j X^j$ avec $a_j = \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$ (formule de taylor) et la base dual de B est $e_j^*(P) = a_j$.

Théorème (de représentation de Riesz) 13 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est muni d'un produit scalaire, alors pour toute forme linéaire $\omega \in E^*$, il existe un unique $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \omega(x) = \langle a, x \rangle$.

Remarque 14 : C'est ce théorème qui permet par exemple de définir le gradient d'une application de E dans $\mathbb{R}$ par rapport à un point a.

1.3 Bidual et base antéduale

Définition 15 : On appelle bidual de E l'espace dual de E^*, noté E^{**}.

Théorème 16 : Étant donnée une base $\mathcal{B}' = (l_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E^*, il existe une base $\mathcal{B} = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que $\mathcal{B}'$ soit la base dual de $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ est appelé base antéduale.

Théorème 17 : L'application $\theta : E \mapsto E^{**}$ qui associe a tout vecteur $x \in E$, la forme linéaire $\theta(x)$ définie sur E^* par $\forall \varphi \in E^*, \theta(x)(\varphi) = \varphi(x)$ est linéaire et injective.

Remarque 18 : On dit que θ est l'injection canonique de E dans son bidual.

Proposition 19 : E et E^{**} sont canoniquement isomorphe à E.

2 Orthogonalité et application transposée

2.1 Orthogonalité

Définition 20 : On dit qu'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ et un vecteur $x \in E$ sont orthogonaux si $\varphi(x) = 0$.

Remarque 21 : Si E est un espace euclidien, on retrouve la notion classique d'orthogonalité avec le théorème de représentation de Riesz $\varphi(x) = \langle a, x\rangle$.

Définition 22 : L'orthogonal dans E^* d'une partie non vide X de E est l'ensemble $X^\perp = \{\varphi \in E^* | \forall x \in X, \varphi(x) = 0\}$.

L'orthogonal dans E d'une partie non vide Y de E^* est l'ensemble $Y^o = \{x \in E | \forall \varphi \in Y, \varphi(x)\} = 0$.

Théorème 23 : Soient A, B des partie non vides de E et U, V des parties non vides de E^*.

1) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$
2) $A^\perp = (Vect(A))^\perp$.
3) Si $U \subset V$, alors $V^o \subset U^o$
4) $U^o = (Vect(U))^o$.
5) $A \subset (A^\perp)^o$
6) $U^o = (U^o)^\perp$.
7) $\{0\}^\perp = E^*$,$E^\perp = \{0\}$,$\{0\}^o = E$,$(E^*)^o = \{0\}$.

Théorème 24 : 1) Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E)$.

2) Pour tout sous-espace vectoriel G de E^*, on a $dim(G) + dim(G^o) = dim(E)$.

3) Pour tous sous-espaces-vectoriel F de E et tout sous-espace vectoriel G de E^*, on a $F = (F^\perp)^o$ et $G = (G^o)^\perp$.

4) Pour toute partie X de E, on a $(X^\perp)^o = Vect(X)$.

5) Pour tous sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E, on a :

$$(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp \text{ et } (F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp.$$

6) Pour tous sous-espaces vectoriels G_1 et G_2 de E^*, on a :

$$(G_1 + G_2)^o = G_1^o \cap G_2^o \text{ et } (G_1 \cap G_2)^o = G_1^o + G_2^o.$$

Proposition 25 : Si $(\varphi_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille de formes linéaires sur E de rang r, le sous-espace vectoriel $F = \bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i)$ de E est alors de dimension $n - r$. Réciproquement si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension m, il existe alors une famille $(\varphi_i)_{1\leq i\leq r}$ de formes linéaires sur E de rang $r = n - m$, telle que $F = \bigcap_{i=1}^r \ker(\varphi_i)$.

2.2 Transposition

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 26 : La transposée de l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est l'application ${}^tu$ de F^* dans E^* définie par $\forall \varphi \in F^*, {}^tu(\varphi) = \varphi \circ u$. On a que ${}^tu$ est linéaire.

Théorème 27 : L'application de transposition $u \mapsto {}^tu$ est linéaire et injective de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(F^*, E^*)$.

Théorème 28 : Soient u dans $\mathcal{L}(E, F)$ et v dans $\mathcal{L}(F, G)$. On a :

1) ${}^t(v \circ u) = {}^tu \circ {}^tv$
5) u est surjective ssi ${}^tu$ est injective.
2) Pour $F = E$, ${}^tId_E = Id_{E^*}$
6) $Im({}^tu) = (Im(u))^\perp$.
3) Si u un isomorphisme, ${}^tu$ aussi et $({}^tu)^{-1} = {}^tu^{-1}$
7) u injective ssi ${}^tu$ est surjective.
4) $\ker({}^tu) = (Im(u))^\perp$
8) u et ${}^tu$ ont même rang.

Théorème 29 : Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors la matrice de ${}^tu$ dans les bases $\mathcal{B}'^*$ et $\mathcal{B}^*$ est la transposée ${}^tA$.

3 Applications des formes linéaires à la réduction

3.1 Réduction des endomorphismes nilpotents

Définition 30 : Un endomorphisme u est nilpotent si il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $u^s = 0$.

Exemple 31 : L'application dérivation $P \mapsto P'$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ est nilpotente.

Proposition 32 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) u est nilpotent.
ii) $P_u(X) = X^n$.
iii) il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\pi_u = X^p$.
iv) u est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale.
v) u est trigonalisable et sa seule valeur propre est zéro.

Théorème 33 : Si car($\mathbb{K}$)=0, alors on a que $\forall k \in \mathbb{N}^*, tr(u^k) = 0 \Leftrightarrow u$ est nilpotent.

Application (Théorème de Burnside) 34 : soit G un sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini. Alors G est fini.

Définition 35 : On appelle bloc de Jordan de taille $m \in \mathbb{N}^*$ la matrice suivante :

$$N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$$

Remarque 36 : Cette matrice est nilpotente d'indice m.

Développement (Réduction des endomorphismes nilpotents) 37 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, avec comme indice de nilpotence m.
Alors E se décompose en somme de sous-espaces cycliques et il existe $m_1 \geq ... \geq m_s$ tels que u est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} N_{m_1} & & & \\ & N_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_{m_s} \end{pmatrix}$$

Dev 1

Corollaire (Réduction de Jordan) 38 : Si P_u est scindé, on en déduit la réduction de jordan en trigonalisant u et on le scinde en une matrice diagonale et une matrice nilpotente. D'après la réduction précédente, on obtient celle de jordan.

3.2 Réduction des endomorphisme symétriques

Définition 39 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$, ce qui revient à dire que $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$.
On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | {}^tA = A\}$ l'espace vectoriel des matrices réelles symétriques d'ordre n.

Exemple 40 : L'application p_F est autoadjoint.

Théorème 41 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

Corollaire 42 : $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Définition 43 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique positif (défini positif) s'il est symétrique avec $\langle x, u(x)\rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ ($\langle x, u(x)\rangle > 0$ pour tout $x \neq 0$). On note alors $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$.
On a la même définition pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 44 : Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. On a $u \in \mathcal{S}^+(E)$ ($u \in \mathcal{S}^{++}(E)$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (strictement positives).

Lemme 45 : Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

Lemme 46 : On suppose $n \geq 2$. Si λ, μ sont deux valeurs propres distinctes de $u \in \mathcal{S}(E)$, alors les sous-espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Théorème (Spectral) 47 : • Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{S}(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.
• Toute matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ se diagonalise dans une base orthonormée, ie il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Théorème 48 : L'application $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Théorème 49 : Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe alors une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Théorème (Décomposition polaire) 50 : L'application $\mu : (O,S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto OS \in GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Application 51 : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

Développement 52 : L'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$ est égale à la boule unité $B(0,1)$, définie par $B(0,1) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : |||A|||_2 \leq 1\}$

Dev 2

Lemme 53 : Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a alors $\|A\| = \rho(A)$.

Références :

1. Algèbre Gourdon
2. Algèbre et géométrie Rombaldi
3. Algèbre linéaire Grifone
4. Objectif agrégation Beck
5. 131 dvp Lesevre
6. isenmann (rip)